

Tirer parti au mieux des cas sources en raisonnement à partir de cas : approximation, interpolation et extrapolation

Jean Lieber¹, Emmanuel Nauer¹, Henri Prade^{2,3} et Gilles Richard^{2,4}

¹ Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France

² IRIT, Université de Toulouse, France

³ QCIS, University of Technology, Sydney, Australie

⁴ BITE, Londres, Royaume-Uni

lieber@loria.fr nauer@loria.fr prade@loria.fr richard@loria.fr

Résumé

Le raisonnement à partir de cas exploite généralement les cas sources (composé chacun d'un problème source et d'une solution) de façon individuelle, sur la base de la similarité entre le problème source et le problème cible. Ce processus relève d'une approximation. Puis, la solution du problème source doit être adaptée en vue de la résolution du problème cible. Nous défendons dans cet article l'idée selon laquelle il est aussi intéressant de considérer les cas sources par deux ou par trois. Considérer les cas par deux permet de faire une interpolation quand le problème cible est entre deux problèmes sources. Considérer les cas par trois permet de faire une extrapolation. Plus précisément, la solution du problème cible est obtenue, quand c'est possible, comme quatrième terme d'une proportion analogique liant trois problèmes sources avec le problème cible, cette relation de proportion analogique reposant à la fois sur les similarités et les dissimilarités entre cas. Des expériences montrent que les techniques d'interpolation et d'extrapolation sont également utiles pour réutiliser des cas, que ce soit de façon indépendante ou combinée.

Abstract

Case-based reasoning usually exploits source cases (consisting of a source problem and its solution) individually, on the basis of the similarity between the target problem and the source problem. This corresponds to approximation. Then the solution of the source case has to be adapted to the target. We advocate in this paper that it is also worthwhile to consider source cases by two, or by three. Handling cases by two allows for interpolation, when the target problem is between two similar source problems. When cases come by three, it offers a basis for extrapolation. Namely the solution of the target problem is obtained, when possible, as the fourth term of an analogical proportion linking the three source cases with the target, where the

analogical proportion handles both similarity and dissimilarity between cases. Experiments show that interpolation and extrapolation techniques are of interest for reusing cases, either in an independent or in a combined way.

1 Introduction

Le raisonnement à partir de cas (RÀPC) [19] a pour but de résoudre un nouveau problème — le problème *cible* — à l'aide d'un ensemble de cas (la *base de cas*), où un cas est (en général) un couple problème – solution de ce problème. Un cas *source* est un cas de la base de cas, composé d'un *problème source* et d'une de ses solutions. Une approche classique du RÀPC consiste à (i) sélectionner les cas sources *similaires* au problème cible (étape de *remémoration*) et (ii) les réutiliser pour résoudre ce problème (étape d'*adaptation*). Selon cette vision, la cible et la source sont comparés en termes de similarité, ce qui constitue une relation *binaire* (classique ou graduelle), alors que les informations à propos de la façon dont ils diffèrent ne sont généralement pas considérées.

Dans cet article, en plus de cette relation de similarité binaire (qui est à la base de l'approximation), deux autres relations sont considérées : l'*entre-deux* et la *proportion analogique*, ce qui permet d'une façon ou d'une autre de faire intervenir la dissimilarité.

L'*entre-deux* est une relation *ternaire* établissant qu'un objet est « entre » deux autres objets. Elle est utilisée dans le principe d'*interpolation* : si le problème cible est entre deux problèmes sources alors il est plausible que la solution du premier soit entre les solutions des seconds. Sous l'angle de la gradualité, cela suggère que si le problème cible est plus proche de l'un des problèmes sources, sa

solution sera plus proche de celle du problème source en question. Sous un angle booléen, l'entre-deux permet de donner plusieurs solutions potentielles, sauf si les solutions des deux problèmes sources coïncident.

La proportion analogique est une relation *quaternaire* : quatre objets a, b, c et d sont en proportion analogique si « a est à b ce que c est à d ». Une modélisation logique de cette relation [15, 17] a montré qu'elle exprime que « a diffère de b de la même façon que c diffère de b » (et vice-versa) et, de façon équivalente, que « ce que a et c ont en commun, b et d l'ont également ». C'est en ce sens que la proportion analogique relève à la fois de la dissimilarité et de la similarité. Cette relation permet de définir un principe d'*extrapolation* utilisable pour le RÀPC : si le problème cible et trois problèmes sources sont en proportion analogique, il est plausible que les solutions de ces quatre problèmes soient en proportion analogique également. Un tel « saut analogique » permet d'extrapoler une solution au problème cible à partir de solutions de trois problèmes sources distincts. Une illustration de cela est donnée dans [2] où, dans trois situations distinctes, les actions recommandées sont respectivement de (i) servir du thé sans lait et avec du sucre, (ii) servir du thé sans lait et sans sucre, (iii) servir du thé avec lait et avec du sucre, alors que dans une quatrième situation en relation analogique avec les trois autres, l'action à faire serait (iv) de servir du thé avec du lait et sans sucre. La solution (iv) n'est pas choisie parmi les trois autres mais extrapolée à partir d'eux, donnant lieu à la création d'une nouvelle recommandation d'actions.

L'approche décrite dans ce papier combine l'utilisation de la similarité, de l'entre-deux et de la proportion analogique en une approche du RÀPC sans autre source de connaissance que les cas. En effet, la base de connaissances d'un système de RÀPC est traditionnellement constituée de quatre « conteneurs » de connaissances : la base de cas, l'ontologie du domaine, les connaissances de remémoration et les connaissances d'adaptation, mais seules le premier est utilisé dans cette approche.

La section 2 introduit les notions et notations utilisées dans cet article et les hypothèses sur lesquelles il s'appuie. La section 3 décrit l'approche pour appliquer l'approximation, l'interpolation et l'extrapolation au RÀPC. La section 4 décrit une évaluation dans un cadre booléen. La section 5 présente une discussion et une comparaison avec des travaux proches, alors que la section 6 décrit des directions de recherches futures dans la continuité de ce travail.

2 Définitions, notations et hypothèses

Dans cette section, les définitions sont présentées dans un cadre booléen (les objets sont des éléments de \mathbb{B}^p).

2.1 Représentations booléennes

Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs booléennes. Les opérateurs booléens sont dénotés par les connecteurs de la logique propositionnelle : pour $a, b \in \mathbb{B}$, $\neg a = 1 - a$, $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $a \oplus b = |b - a|$ et $a \equiv b = \neg(a \oplus b)$.

Soit p un entier positif. Dans les exemples, un élément de \mathbb{B}^p est noté sans parenthèse ni virgule : $(0, 1, 0, 0, 1)$ est noté simplement 01001. La distance de Hamming H sur \mathbb{B}^p est définie par $H(a, b) = \sum_{i=1}^p |b_i - a_i|$. Par exemple, pour $p = 5$, $H(01001, 11011) = 2$.

2.2 Le RÀPC

Soit \mathcal{P} et \mathcal{S} deux ensembles appelés l'univers des problèmes et l'univers des solutions : un *problème* x (resp., une *solution* y) est par définition un élément de \mathcal{P} (resp., de \mathcal{S}). Ici, $\mathcal{P} = \mathbb{B}^m$, où $m \geq 1$ est un entier donné. De façon similaire, $\mathcal{S} = \mathbb{B}^n$, $n \geq 1$. Une relation binaire sur $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$ dénotée par \rightsquigarrow et qui se lit « a pour solution » est supposée exister. Ainsi, « y résout x » se note $x \rightsquigarrow y$. En général, \rightsquigarrow n'est pas complètement connue du système de RÀPC : un tel système donne des solutions *plausibles* aux problèmes qui lui sont adressés.

Dans certaines situations, \rightsquigarrow est supposée être fonctionnelle, i.e., tout problème a exactement une solution. Cette hypothèse signifie qu'il existe une fonction $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ telle que $x \rightsquigarrow y$ ssi $y = f(x)$, pour tout $x \in \mathcal{P}$ et $y \in \mathcal{S}$.

Un *cas* est un couple $(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$ tel que $x \rightsquigarrow y$. La *base de cas* BC est un ensemble fini de cas. Un *cas source* est un élément de BC. Le *problème cible* est le problème à résoudre. Le RÀPC vise à résoudre le problème source à l'aide de la base de cas. Il consiste généralement à (1) sélectionner les cas sources pertinents (remémoration) et (2) réutiliser ces cas sources afin de résoudre le problème cible (adaptation). Les autres étapes classiques du RÀPC ne sont pas considérées ici : ils concernent la validation et réparation éventuelle du cas nouvellement formé et son potentiel ajout à la base de cas.

2.3 L'entre-deux

Soit \mathcal{U} un ensemble dont les éléments sont représentés par des attributs numériques (incluant les attributs booléens). Soit $a, b, c \in \mathcal{U}$; a est *entre* b et c , dénoté par $b-a-c$, si pour chaque attribut i , $b_i \leq a_i \leq c_i$ ou $c_i \leq a_i \leq b_i$. Pour $b, c \in \mathcal{U}$, soit $\text{Entre}(b, c) = \{a \in \mathcal{U} \mid b-a-c\}$. Par exemple, dans $\mathcal{U} = \mathbb{B}^5$, $\text{Entre}(01001, 11011) = \{01001, 11001, 01011, 11011\}$. Dans [22], l'entre-deux est présenté sous l'angle de la logique.

2.4 La proportion analogique

Soit \mathcal{U} un ensemble. Une proportion analogique sur \mathcal{U} est une relation quaternaire entre les éléments a, b, c et d

de \mathcal{U} qui se lit « a est à b ce que c est à d », noté $a:b::c:d$, ayant les propriétés suivantes (voir, par exemple [17]), pour tout $(a, b, c, d) \in \mathcal{U}^2$:

réflexivité $a:b::a:b$,

symétrie si $a:b::c:d$ alors $c:d::a:b$,

permutation centrale si $a:b::c:d$ alors $a:c::b:d$.

Dans le cadre booléen, l'analogie proportionnelle considérée est définie sur \mathbb{B} par

$$a:b::c:d \quad \text{si } (a \wedge \neg b \equiv c \wedge \neg d) \wedge (\neg a \wedge b \equiv \neg c \wedge d) = 1$$

ce qui peut se lire « a diffère de b comme c diffère de d ». Cela peut se réécrire $b - a = d - c$, en gardant en tête que ces différences prennent leurs valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Ainsi, les motifs $abcd$ tels que $a:b::c:d$ sont 0000, 1111, 0011, 1100, 0101 et 1010.

La proportion analogique peut être étendue sur $\mathcal{U} = \mathbb{B}^p$ par

$$a:b::c:d \quad \text{si } a_i:b_i::c_i:d_i \text{ pour tout } i \in [1, p]$$

Étant donné $a, b, c \in \mathcal{U}$, résoudre l'équation analogique $a:b::c:y$ vise à trouver $y \in \mathcal{U}$ satisfaisant cette relation. Cette équation peut n'avoir aucune solution, par exemple, $0:1::1:y$ n'a pas de solution. L'équation $a:b::c:y$ dans \mathbb{B} a une solution ssi $(a \equiv b) \vee (a \equiv c) = 1$ et, quand c'est le cas, cette solution est unique et donnée par $y = c \equiv (a \equiv b)$.

3 Réutilisation des cas par approximation, interpolation et extrapolation

Cette section décrit les trois approches : l'approximation, l'interpolation et l'extrapolation. Pour un entier $k \geq 1$, la remémoration vise à produire des ensembles ordonnés de k cas sources. Ce principe est détaillé à la section 3.2 et est appliqué dans les sections 3.3, 3.4 et 3.5 respectivement pour $k = 1, 2$ et 3 . La combinaison de ces trois approches est discutée à la section 3.6. Commençons par un exemple.

3.1 Exemple applicatif

Pour illustrer l'intuition associée aux différentes approches, considérons l'exemple suivant, dans lequel un type de plat approprié (décrit par 3 attributs binaires i.e. $\mathcal{S} = \mathbb{B}^3$) doit être proposé à une personne (décrite par 8 attributs binaires i.e. $\mathcal{P} = \mathbb{B}^8$). Les 8 attributs représentant la personne \mathbf{x} ont la signification suivante : x_1 : \mathbf{x} a de la goutte, x_2 : \mathbf{x} est diabétique, x_3 : \mathbf{x} est allergique aux oléagineux, x_4 : \mathbf{x} ne mange pas de viande (boeuf, porc, etc.), x_5 : \mathbf{x} nécessite un apport en calcium, x_6 : \mathbf{x} nécessite un apport en fer, x_7 : \mathbf{x} aime les légumes, et x_8 : \mathbf{x} n'aime pas les produits laitiers. Un type de plat \mathbf{y} est représenté par 3 attributs : y_1 : \mathbf{y} est un plat en sauce, y_2 : \mathbf{y} est un plat à base de féculents (p. ex., un plat de pâtes), y_3 : \mathbf{y}

est un plat avec du poisson. $\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{y}$ peut être interprété comme : \mathbf{y} est un plat approprié pour \mathbf{x} . Pour une personne en bonne santé 00000010 (sans exigence particulière, sinon qu'elle aime les légumes), tous les types de plats sont appropriés. C'est pourquoi, \rightsquigarrow n'est pas fonctionnel dans ce contexte, puisque plusieurs types de plats peuvent être appropriés pour une même personne. Les trois approches de réutilisation des cas développées dans cet article peuvent être appliquées à cet exemple de la façon suivante (où \mathbf{y}^j est un type de plat approprié pour \mathbf{x}^j) :

Approximation Si une personne \mathbf{x}^{tgt} est proche de \mathbf{x}^1 , il est plausible qu'un type de plat approprié pour \mathbf{x}^{tgt} sera proche d'un type de plat \mathbf{y}^1 approprié pour \mathbf{x}^1 .

Interpolation Si une personne \mathbf{x}^{tgt} est entre deux personnes \mathbf{x}^1 et \mathbf{x}^2 , il est plausible qu'un type de plat approprié pour \mathbf{x}^{tgt} sera entre \mathbf{y}^1 , un type de plat approprié pour \mathbf{x}^1 , et \mathbf{y}^2 , un type de plat approprié pour \mathbf{x}^2 .

Extrapolation Si une personne \mathbf{x}^{tgt} est similaire à \mathbf{x}^3 comme \mathbf{x}^2 est similaire à \mathbf{x}^1 , il est plausible qu'un type de plat approprié à \mathbf{x}^{tgt} sera semblable à \mathbf{y}^3 comme \mathbf{y}^2 est semblable à \mathbf{y}^1 .

3.2 Principe général

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$: l'approche générale présentée ici couvre l'approximation ($k = 1$), l'interpolation ($k = 2$) et l'extrapolation ($k = 3$). Deux relations ($k + 1$)-aires sont considérées : $\text{Rel}_{\mathcal{P}}$ sur \mathcal{P} et $\text{Rel}_{\mathcal{S}}$ sur \mathcal{S} . Dans l'idéal, on suppose que ces relations sont liées par la propriété suivante :

$$\text{si } \text{Rel}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}) \text{ alors } \text{Rel}_{\mathcal{S}}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1})$$

pour $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}) \in \mathcal{P}^{k+1}$ et $(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1}) \in \mathcal{S}^{k+1}$ tels que $\mathbf{x}^j \rightsquigarrow \mathbf{y}^j$ pour tout $j \in [1, k + 1]$.

Cependant, cette hypothèse est habituellement trop forte, étant donné que la relation \rightsquigarrow est seulement partiellement connue pour le système de RÀPC. Ainsi, seule la forme relâchée de cette propriété est supposée :

$$\begin{aligned} &\text{si } \text{Rel}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}) \text{ et } \mathbf{x}^j \rightsquigarrow \mathbf{y}^j \text{ pour } j \in [1; k + 1] \\ &\text{alors il est plausible que } \text{Rel}_{\mathcal{S}}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1}) \end{aligned} \quad (1)$$

Cette propriété (1) peut être utilisée pour le RÀPC. Soit \mathbf{x}^{tgt} le problème cible. Un *candidat* est un ensemble ordonné de k cas $((\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), \dots, (\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)) \in \text{BC}^k$ tel que $\text{Rel}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{\text{tgt}})$.

remémoration Les candidats sont sélectionnés.

adaptation Pour un candidat, il est plausible que la solution \mathbf{y}^{tgt} de \mathbf{x}^{tgt} satisfasse l'équation analogique $\text{Rel}_{\mathcal{S}}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k, \mathbf{y})$. On suppose que c'est le cas et, si cette équation a une solution \mathbf{y} , on retourne $\mathbf{y}^{\text{tgt}} = \mathbf{y}$.

Soit Candidats l'ensemble des candidats. Si $\text{Candidats} = \emptyset$, l'approche échoue. Si $|\text{Candidats}| \geq 2$, une combinaison des solutions, ou un vote, peut avoir lieu. Soit $\text{solutionsPotentielles}$, le multiensemble des $y \in \mathcal{S}$ tel que $(x, y) \in \text{Candidats}$. Quand il y a plusieurs solutions *distinctes* dans ce multiensemble, la nécessité d'une fonction d'«intégration» de ces solutions en une seule apparaît. Soit $\text{intégrer} : \text{solutionsPotentielles} \mapsto y \in \mathcal{S}$ une telle fonction. La nature de cette fonction varie selon celle de l'espace des solutions. Quand $\mathcal{S} = \mathbb{B}$ (ou, plus généralement, un ensemble de petite cardinalité) alors intégrer peut être un simple vote. Quand $\mathcal{S} = \mathbb{B}^n$, l'intégration peut être un vote composante par composante, par exemple :

$$\text{intégrer}(\{\{001, 001, 010, 111, 111\}\}) = 011$$

(avec un choix arbitraire en cas d'égalité).

3.3 Réutiliser les cas par singletons : l'approximation

Si $k = 1$, les candidats sont des singletons et les cas sources sont examinés individuellement par rapport au problème cible. Habituellement, les relations binaires $\text{Rel}_{\mathcal{P}}$ et $\text{Rel}_{\mathcal{S}}$ sont liées à la notion de similarité et sont dénotées $x^1 \simeq x^2$ et $y^1 \simeq y^2$. Si une distance dist existe sur l'univers, \simeq est définie par $a \simeq b$ ssi $\text{dist}(a, b) \leq \sigma_{\text{dist}}$ avec $\sigma_{\text{dist}} > 0$ un seuil fixé. Appliquer le principe général (1) conduit à :

$$\text{si } x^1 \simeq x^2 \text{ et } x^j \rightsquigarrow y^j \text{ pour } j \in \{1, 2\}$$

$$\text{alors il est plausible que } y^1 \simeq y^2$$

i.e., des problèmes similaires ont des solutions similaires, un principe couramment mis en avant en RÀPC (voir p. ex. [10]).

Par rapport à notre exemple applicatif, considérons deux personnes avec des profils proches (selon une distance de Hamming), p. ex., $x^1 = 00010010$ et $x^2 = 00010011$. Dans cet exemple, $H(x^1, x^2) = 1$ (x^2 n'aime pas les produits laitiers). Un plat sans sauce $y^2 = 011$, à une distance 1 de $y^1 = 111$ (un type de plat approprié pour x^1) sera approprié pour x^2 .

3.4 Réutiliser les cas par couples : l'interpolation

Si $k = 2$, les candidats sont des couples, et les relations $\text{Rel}_{\mathcal{P}}$ et $\text{Rel}_{\mathcal{S}}$ sont des relations d'encadrement sur \mathcal{P} et sur \mathcal{S} . Appliquer le principe général (1) conduit ici à :

$$\text{si } x^1 - x^3 - x^2 \text{ et } x^j \rightsquigarrow y^j \text{ pour } j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\text{alors il est plausible que } y^1 - y^3 - y^2$$

Appliqué au RÀPC, une paire mémorisée $\{(x^1, y^1), (x^2, y^2)\} \in \text{Candidats}$ est telle que $x^1 - x^{\text{tgt}} - x^2$. L'adaptation exploite alors l'information inférée

$y^1 - y^{\text{tgt}} - y^2$. Une façon d'avoir une solution unique est d'avoir $y^1 = y^2$, qui implique que $y^{\text{tgt}} = y^1$ est une solution candidate pour x^{tgt} . Si $\text{Candidats} = \emptyset$, l'égalité $y^1 = y^2$ peut être relâchée en $\text{dist}(y^1, y^2) \leq \sigma_{\text{dist}}$ (avec dist une distance sur \mathcal{S}). Dans ce cas, l'unicité de y^{tgt} n'est plus garantie. À l'inverse, si Candidats est trop grand, il peut être restreint aux paires $\{(x^1, y^1), (x^2, y^2)\}$ telles que $\text{dist}(x^1, x^2) \leq \sigma_{\text{entre}}$, avec $\sigma_{\text{entre}} > 0$ un seuil donné.

Par rapport à notre exemple applicatif, soit $x^{\text{tgt}} = 11010010$, $(x^1, y^1) = (01110010, 001)$, et $(x^2, y^2) = (10010010, 001)$ (i.e. $H(x^1, x^2) = 3$) : x^{tgt} , x^1 et x^2 qui diffèrent uniquement sur le fait que les personnes ont/n'ont pas de la goutte/du diabète/une allergie aux oléagineux. $y^1 = y^2 = 001$ est la solution «un plat sans sauce, sans féculent mais avec du poisson». Comme $x^1 - x^{\text{tgt}} - x^2$, une solution est $y^{\text{tgt}} \in \text{Entre}(y^1, y^2) = \{y^1\}$, i.e. $y^{\text{tgt}} = y^1 = y^2$.

3.5 Réutiliser les cas par triplets : l'extrapolation

Si $k = 3$, les candidats sont des triplets. $\text{Rel}_{\mathcal{P}}$ et $\text{Rel}_{\mathcal{S}}$ sont des proportions analogiques sur \mathcal{P} et sur \mathcal{S} . Appliquer le principe général (1) conduit ici à :

$$\text{si } x^1 : x^2 :: x^3 : x^4 \text{ et } x^j \rightsquigarrow y^j \text{ pour } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{alors il est plausible que } y^1 : y^2 :: y^3 : y^4$$

Appliqué au RÀPC, un élément de Candidats est un triplet $((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ de cas sources tel que (i) $x^1 : x^2 :: x^3 : x^{\text{tgt}}$ et (ii) l'équation $y^1 : y^2 :: y^3 : y$ a une solution. Cette solution, unique dans le cadre booléen, est considérée comme une solution plausible de x^{tgt} .

Revenons à notre exemple applicatif où nous cherchons un type de plat y^{tgt} pour une personne x^{tgt} , avec :

x^1	=	00001011	y^1	=	010
x^2	=	00100010	y^2	=	110
x^3	=	10001011	y^3	=	001
x^{tgt}	=	10100010	y^{tgt}	=	???

La relation $x^1 : x^2 :: x^3 : x^{\text{tgt}}$ est vérifiée et l'équation $y^1 : y^2 :: y^3 : y$ a comme unique solution $y^{\text{tgt}} = 101$. Notre calcul de solution établit que $y^{\text{tgt}} = 101$ est une option appropriée pour x^{tgt} . En considérant la signification des paramètres, x^{tgt} a de la goutte, pas de diabète, est allergique aux oléagineux, n'est pas réfractaire à la viande, n'a pas besoin d'un supplément ni en calcium ni en fer et aime les légumes et les produits laitiers. Le type de plat $y^{\text{tgt}} = 101$ décrivant un plat de poisson avec de la sauce mais sans féculent est approprié pour ce type de personne.

3.6 Combiner ces approches

Nous disposons à présent de trois méthodes : l'approximation, l'interpolation et l'extrapolation, pour résoudre un

problème. Ces méthodes donnent des résultats plausibles et incomplets : pour un problème cible \mathbf{x}^{tgt} , chacune d'elles peut échouer soit en donnant une solution incorrecte, soit en ne fournissant aucune solution. Une discussion complète des options possibles pour combiner ces trois méthodes n'est pas l'objectif de cet article mais constitue un travail futur. Cependant, cette section introduit certaines idées sur la conception d'une bonne méthode de combinaison.

Un moyen simple de combiner ces méthodes est d'utiliser une relation de préférence entre elles : si la méthode préférée donne une solution, cette solution sera celle retournée, sinon la deuxième méthode préférée est essayée, et ainsi de suite. Cela fait sens car une méthode qui donne des résultats peu fréquemment mais avec un haut degré de plausibilité doit être tentée avant une méthode fournissant des résultats fréquents avec une plausibilité plus faible.

Maintenant, étant donné ces trois méthodes, comment établir la relation de préférence ? Pour cela, une analyse de la base de cas peut aider. En particulier, pour la méthode d'extrapolation, il a été démontré que les fonctions f telles que $\mathbf{x}^1 : \mathbf{x}^2 :: \mathbf{x}^3 : \mathbf{x}^4$ implique $f(\mathbf{x}^1) : f(\mathbf{x}^2) :: f(\mathbf{x}^3) : f(\mathbf{x}^4)$ pour tous $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4) \in \mathcal{P}^4$ sont des fonctions affines [6, 7]¹. Ainsi, si \leadsto est fonctionnelle ($\leadsto = f$) et f est affine, alors la méthode d'extrapolation ne donne jamais une solution incorrecte. Si f est proche d'être une fonction affine, alors cette méthode donne de bons résultats (et doit être très bien placée dans la relation de préférence). Une mesure de proximité à l'afinité est le test BLR [3] qui peut être exécuté sur la base de cas.

Une autre approche pour la combinaison des méthodes consiste à avoir une préférence entre les méthodes dépendant du problème cible. Pour cela, une idée est d'associer au résultat de chaque méthode un score relatif à la confiance de la méthode par rapport à sa sortie : la méthode préférée est celle avec le score le plus élevé. Par exemple, la méthode d'approximation aura un score élevé si plusieurs cas sources donnent la solution retournée et peu de cas sources conduisent à une autre solution. Un principe similaire peut être appliqué à l'interpolation et à l'extrapolation.

4 Évaluation

L'objectif de cette section est d'étudier le comportement des trois approches précédentes, sur différents types de fonctions booléennes, afin d'évaluer leur applicabilité et de déterminer leur éventuelle complémentarité. Les premiers résultats expérimentaux sont présentés et enfin une

méthode de combinaison fondée sur la préférence est exposée.

4.1 Contexte expérimental

Dans nos expériences, $\mathcal{P} = \mathbb{B}^8$ et $\mathcal{S} = \mathbb{B}^3$. Ici \leadsto est supposé être fonctionnelle : $\leadsto = f$.

La fonction f est générée de manière aléatoire à l'aide des fonctions suivantes qui sont fondées sur les trois formes normales les plus classiques dans le but d'avoir une diversité de fonctions générées :

FNC f est générée en forme normale conjonctive, c.-à-d., que $f(\mathbf{x})$ est une conjonction de n_{conj} clauses (disjonctions de littéraux), par exemple :

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1 \vee \neg \mathbf{x}_7) \wedge (\neg \mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_7 \vee \mathbf{x}_8) \wedge \mathbf{x}_4.$$

La valeur de n_{conj} est choisie au hasard uniformément dans $\{3, 4, 5\}$. Chaque disjonction est générée sur la base de deux paramètres, $p^+ > 0$ et $p^- > 0$, avec $p^+ + p^- < 1$: dans chaque clause, pour chaque variable x_i , elle apparaît sous forme de littéral positif (resp., négatif) avec une probabilité p^+ (resp., p^-). Dans nos expériences, nous avons choisi $p^+ = p^- = 0,1$.

FND f est générée sous forme normale disjonctive : f a la même forme que si elle était générée par FNC à l'échange près des connecteurs \wedge et \vee . Les paramètres n_{disj} , p^+ et p^- sont fixés de la même manière.

Pol est identique à FND, sauf que les disjonctions (\vee) sont remplacées par des ou exclusifs (\oplus), ce qui conduit à une forme normale polynomiale. Le seul paramètre qui diffère est $p^- = 0$ (seuls les littéraux positifs apparaissent dans la forme normale polynomiale : rappelons que $\neg \varphi = \varphi \oplus 1$ pour toute formule φ).

La base de cas BC est générée aléatoirement, avec des valeurs de taille $|\text{BC}| \in \{16, 32, 64, 96, 128\}$, i.e. $|\text{BC}|$ est compris entre $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{2}$ de $|\mathcal{P}| = 2^8 = 256$. Chaque cas source (\mathbf{x}, \mathbf{y}) est généré comme suit : \mathbf{x} est choisi au hasard dans \mathcal{P} avec une distribution uniforme et $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Chacune des méthodes peut mener à plusieurs solutions. Soit Y le multienemble de ces solutions. La fonction intégrer introduite à la fin de la section 3.2 a pour but d'associer à Y un élément $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ unique. Celui considéré consiste en un vote composante par composante (comme dans l'exemple en fin de cette section 3.2).

Soit npc le nombre de problèmes cibles posés au système, nr le nombre de réponses (correctes ou incorrectes) ($\text{npc} - \text{nr}$ est le nombre de problèmes cibles pour lesquels le système ne propose pas de solution), ssrcrp la somme des similarités entre la réponse correcte (selon la fonction générée f) et la réponse prédite, où la similarité entre deux solutions \mathbf{y}^1 et \mathbf{y}^2 est calculée par $1 - H(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2)/3$. Pour chacune des méthodes, les scores suivants sont calculés :

La précision préc est la moyenne des rapports $\frac{\text{ssrcrp}}{\text{nr}}$.

1. Une fonction affine $f : \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}$ est de la forme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{x}_{i_q} \oplus c$ avec $\{i_1, \dots, i_q\}$ un sous-ensemble de $[1, m]$ et $c \in \{0, 1\}$. Une fonction affine $f : \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}^n$ est de la forme $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ où chaque $f_j : \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}$ est une fonction affine.

Le taux de réponses correctes trc est la moyenne des rapports $\frac{\text{ssrcrp}}{\text{npc}}$.

La moyenne est calculée sur 100 fonctions générées f . Les paramètres de chaque méthode ont été choisis comme suit :

approximation $\sigma_{\text{dist}} = 1$ sur \mathcal{P} ;

interpolation $\sigma_{\text{dist}} = 0$ sur \mathcal{S} (i.e., $y^1 = y^2$), $\sigma_{\text{entre}} = 2$;

extrapolation Tous les triplets en analogie avec \mathbf{x}^{tgt} sont considérés.

combinaison La méthode fondée sur la préférence a été choisie et la relation de préférence a été établie après des tests préliminaires fondés sur la précision :

- Pour FNC et FND, l'interpolation est préférée à l'approximation qui est préférée à l'extrapolation ;
- Pour Po1, l'extrapolation est préférée à l'interpolation qui est préférée à l'approximation.

Pour des raisons de reproductibilité, le code de ces expériences est disponible à l'adresse <https://tinyurl.com/CBRTTests> avec les résultats détaillés (fonctions générées et détails de l'évaluation).

Au sujet de l'implémentation. Un algorithme naïf pour l'implémentation de chaque méthode $k \in \{1, 2, 3\}$ est en $O(|\text{BC}|^k)$. Toutefois, cette complexité peut être réduite pour l'interpolation en itérant seulement sur les couples de cas $((\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)) \in \text{BC}^2$ tels que $H(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \leq \sigma_{\text{dist}}$. Pour l'extrapolation, la complexité peut être dissociée en des calculs hors-ligne et en-ligne. La partie hors-ligne est en $O(|\text{BC}|^2)$ et génère une table de hachage sur les clés représentant les différences entre \mathbf{x}^1 et \mathbf{x}^2 (considérés comme des vecteurs de \mathbb{R}^m). Par exemple, $\text{clef}(01001, 11010) = (-1, 0, 0, 0, -1, 0)$. La partie en ligne est en $O(|\text{BC}|)$ et recherche tous les $(\mathbf{x}^3, \mathbf{y}^3) \in \text{BC}$ tels que $\text{clef}(\mathbf{x}^3, \mathbf{x}^{\text{tgt}}) = \text{clef}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, ce qui équivaut à $\mathbf{x}^1 : \mathbf{x}^2 :: \mathbf{x}^3 : \mathbf{x}^{\text{tgt}}$.

4.2 Résultats

La figure 1 illustre les résultats détaillés de la table 1. La précision des résultats montre que, pour FNC et FND, l'interpolation donne de meilleurs résultats que l'approximation et l'extrapolation, et aussi que l'approximation donne de meilleurs résultats que l'extrapolation. Cependant, lorsqu'on examine les résultats du point de vue du taux de réponses, l'interpolation a une faible performance, en particulier lorsque la base de cas est faible ($|\text{BC}| \in \{16, 32\}$), en raison de la difficulté à trouver deux candidats pour l'entre-deux.

Les résultats sont différents pour Po1, pour lesquels l'extrapolation fournit de meilleurs résultats. Ce résultat peut s'expliquer pour les fonctions qui sont proches des fonctions affines, pour lesquelles la méthode d'extrapolation renvoie toujours une bonne réponse [6, 6]. Pour FND, la

deuxième meilleure approche de précision est l'approximation. Encore une fois, la faiblesse des deux meilleures méthodes (extrapolation et interpolation) est leur faible taux de réponses correctes. On doit noter que, dans tous les cas, l'approximation fournit un meilleur taux de réponses correctes, surtout lorsque la base de cas est réduite.

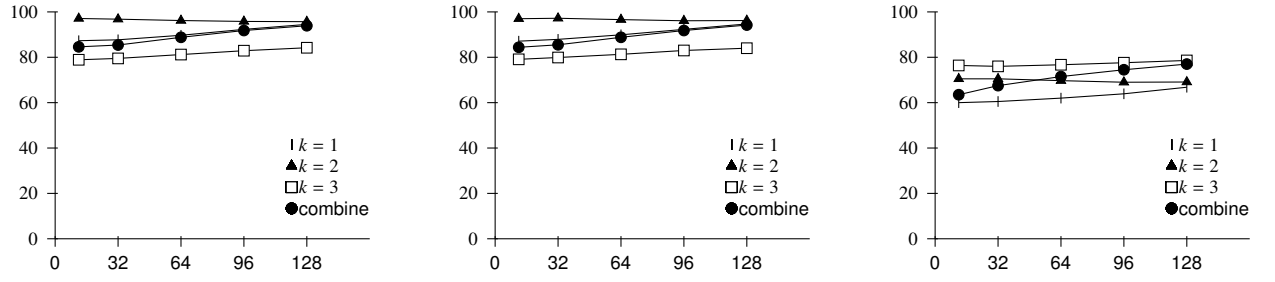
Enfin, comme prévu, combiner les trois approches par ordre de préférence (interpolation–approximation–extrapolation pour FND et FNC et extrapolation–approximation–interpolation pour Po1) améliore les résultats fournis en n'utilisant qu'une approximation.

L'élaboration d'une meilleure méthode de combinaison constitue un travail futur. Cependant, une approche simple mais prometteuse serait d'estimer la valeur moyenne de la précision — et donc, la relation de préférence — sur la base de cas, en utilisant l'approche suivante : pour chaque cas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \text{BC}$, les trois méthodes sont exécutées avec le problème cible $\mathbf{x}^{\text{tgt}} = \mathbf{x}$ et la base de cas $\text{BC} \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$, et les résultats des trois méthodes sont comparés à la solution connue $\mathbf{y}^{\text{tgt}} = \mathbf{y}$, ce qui permet de calculer une précision moyenne pour chaque méthode.

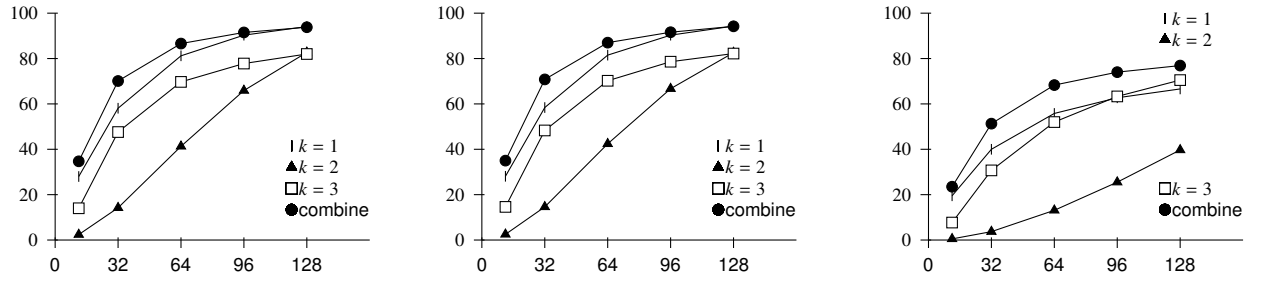
Une autre question à étudier est de savoir si cela vaut la peine de trouver une bonne méthode de combinaison. En effet, si toutes les méthodes sont fortement corrélées, leur combinaison ne donnerait que peu d'amélioration. À cette fin, un essai préliminaire a été effectué qui calcule la covariance des événements « Réponse incorrecte pour la méthode k » et « Réponse incorrecte pour la méthode ℓ », avec $k, \ell \in \{1, 2, 3\}$ et $k \neq \ell$: $\text{cov}_{k\ell} = P_{k\ell} - P_k P_\ell$ où $P_{k\ell}$ estime la probabilité que les méthodes k et ℓ fournissent une réponse incorrecte, P_k estime la probabilité que la méthode k fournisse une réponse incorrecte et P_ℓ est défini de façon similaire. Les résultats sur les données générées sont : $\text{cov}_{12} = \text{cov}_{21} \approx 0,90$, $\text{cov}_{23} = \text{cov}_{32} \approx 0,41$, et $\text{cov}_{13} = \text{cov}_{31} \approx 0,27$. Cela peut être interprété comme suit : la forte corrélation entre approximation et interpolation est principalement due aux limites étroites utilisées dans les expériences pour l'interpolation. En revanche, l'extrapolation est *beaucoup moins corrélée* avec les autres méthodes. Cela suggère la complémentarité de l'extrapolation par rapport aux autres, d'où l'intérêt d'étudier plus en détails le problème de la combinaison.

5 Discussion et travaux proches

Un point important soulevé dans cet article est que la réutilisation de plusieurs cas ($k \geq 2$) ne s'appuie pas nécessairement sur la similarité (du moins, pas uniquement sur elle) : dans la situation générale, elle s'appuie sur deux relations d'arité $k + 1$ sur \mathcal{P} et \mathcal{S} qui ne sont pas réductibles à des relations binaires de similarité. Ces relations structurent les espaces des problèmes et des solutions. Des problématiques similaires sont étudiées dans d'autres travaux de la littérature du RÀPC. Par exemple, la réutili-



(a) La précision en fonction de $|BC|$, pour chaque générateur (de gauche à droite : FNC, FND, Pol).



(b) Le taux de réponses correctes en fonction de $|BC|$, pour chaque générateur (de gauche à droite : FNC, FND, Pol).

FIGURE 1 – Précision et taux de réponses correctes en fonction du cas de base pour les trois générateurs, pour chaque méthode ($k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ et « combine », c'est-à-dire la combinaison de les trois autres méthodes).

		$ BC = 16$				$ BC = 32$				$ BC = 64$				$ BC = 96$				$ BC = 128$			
		1	2	3	c.	1	2	3	c.	1	2	3	c.	1	2	3	c.	1	2	3	c.
FNC	préc	87	97	79	85	88	97	79	85	90	96	81	89	92	96	83	92	94	96	84	94
	trc	28	02	14	35	58	14	48	70	81	41	70	87	90	66	78	91	94	83	82	94
FND	préc	87	97	79	84	88	97	80	85	90	97	81	89	92	96	83	92	95	96	84	94
	trc	28	02	15	35	58	15	48	71	81	42	70	87	90	67	79	92	94	83	82	94
Pol	préc	60	70	76	63	61	70	76	67	62	70	77	71	64	69	78	75	67	69	79	77
	trc	19	00	08	24	40	04	31	51	56	13	52	68	63	26	63	74	67	40	70	77

TABLE 1 – préc et trc pour $k \in \{1, 2, 3\}$ et combine (c.) pour les différents générateurs (les valeurs sont des pourcentages).

sation (simple ou multiple) peut bénéficier des hiérarchies d'abstraction sur \mathcal{P} et \mathcal{S} [1, 5, 23]. Un autre exemple de relation utilisée pour la remémoration et l'adaptation de plusieurs cas est la *diversité* : les cas remémorés doivent être divers de façon à mieux contribuer à la résolution du problème cible [14]. L'originalité principale du travail présenté ici est l'utilisation pour le RÀPC de l'entre-deux et de la proportion analogique. Ces deux relations sont indépendantes d'un domaine d'application et peuvent être implantées dans différents formalismes (quoiqu'elles n'aient été considérées ici que dans un cadre booléen), par exemple, sur des chaînes de caractères [13]. Cela permet d'appliquer au RÀPC les principes de l'interpolation et de l'extrapolation, en plus de celui déjà fréquemment utilisé de l'approximation.

L'approche par extrapolation, fondée sur un raisonnement par analogie, peut être liée aux travaux sur l'appren-

tissage de connaissances d'adaptation (ACA) en RÀPC, comme expliqué ci-dessous. La plupart des approches de l'ACA consistent à apprendre des règles d'adaptation en utilisant comme ensemble d'apprentissage un ensemble de couples de cas sources $((x^i, y^i), (x^j, y^j))$ [11, 8, 9]. Une idée similaire consiste à considérer un tel couple comme un *cas d'adaptation* [12, 16]. Étant donné (x^1, y^1) un cas remémoré, il peut être adapté pour résoudre x^{tgt} si la différence entre x^1 et x^{tgt} est égale à la différence entre x^i et x^j , ce qui peut être formalisé par la proportion analogique $x^i : x^j :: x^1 : x^{\text{tgt}}$. Puis, l'adaptation consiste à appliquer sur y^1 la différence entre y^i et y^j , ce qui revient à résoudre l'équation $y^i : y^j :: y^1 : y$. Par conséquent, une contribution de ce travail est la formalisation de l'*adaptation à partir de cas* en termes de proportions analogiques sur les espaces de problèmes et de solutions.

L'idée d'appliquer la proportion analogique a été mise en

évidence et défendue récemment [18] : une telle approche a donné des résultats intéressants en apprentissage artificiel et, plus spécifiquement, en classification [4]. Les raisonnements par interpolation et par extrapolation ont également été étudiés dans le cadre des espaces conceptuels avec des connaissances qualitatives [20]. Des idées similaires ont été appliquées à la complétion de bases de règles si-alors avec l'idée de la proportion analogique [22] et à l'interpolation entre règles de défaut [21]. Cependant, aucun de ces travaux ne considère cela sous l'angle du RÀPC.

6 Conclusion

Le RÀPC exploite classiquement chaque cas remémoré individuellement, sur la base de sa similarité avec le problème cible. Dans cet article, nous proposons d'étendre ce paradigme en exploitant les relations d'entre-deux et de proportion analogique pour lier le problème cible avec, respectivement, des paires et des triplets de cas sources. En faisant cela, nous ne nous contentons pas de proposer la solution connue d'un problème source comme solution du problème à résoudre, mais nous profitons également des idées sur l'interpolation et l'extrapolation.

Nous avons également effectué une première étude expérimentale qui mesure la précision et le taux de réponses correctes des approches par approximation, interpolation et l'extrapolation sur différents types de fonctions. Chaque approche a ses propres avantages. L'approximation est facile à implanter et est souvent efficace. L'interpolation donne les résultats les plus précis, quand elle en donne, mais échoue souvent à en donner. L'extrapolation est meilleure que les deux autres méthodes quand la fonction que le système de RÀPC cherche à estimer est affine — ou proche de l'affinité — une forme de simplicité particulière. De plus, les résultats de l'extrapolation sont peu corrélés avec ceux des deux autres méthodes. Cette dernière considération ainsi que cette première expérimentation montrent que la combinaison de ces approches devrait être fructueuse. La première approche de la combinaison, bien que donnant des résultats prometteurs, est encore superficielle et des approches plus sophistiquées pour effectuer cette combinaison devront être étudiées. Les expériences montrent aussi qu'il serait intéressant de faire varier davantage les paramètres et d'étudier le cas où la relation entre problèmes et solutions n'est pas fonctionnelle.

Deux autres perspectives nous semblent également prometteuses. La première serait de voir comment incorporer dans le modèle les autres « conteneurs de connaissances » typiques du RÀPC : l'ontologie du domaine, les connaissances de remémoration et les connaissances d'adaptation. Par exemple, l'ontologie du domaine peut être vue comme des contraintes de validité des cas, ce qui permet de guider leur intégration en évitant qu'elle ne produise un cas non licite. La seconde est le fait de traiter de relations Rel_ϕ et

Rel_S dans des formalismes au-delà des vecteurs de booléens, avec des relations graduelles et des valeurs nominales ou numériques pour les attributs. Une telle perspective devrait être faisable puisque des extensions des proportions analogiques sur des attributs nominaux ou numériques ont été expérimentées avec succès pour la classification [4] et que l'idée de l'entre-deux semble également susceptible d'être naturellement exploitée dans ces situations.

Références

- [1] Bergmann, R. et W. Wilke: *Building and refining abstract planning cases by change of representation language*. J. of Artificial Intelligence Research, 3 :53–118, 1995.
- [2] Billingsley, R., H. Prade, G. Richard et M. A. Williams: *Towards analogy-based decision - A proposal*. Dans Christiansen, H. et H. Jaudoin (rédacteurs) : *Proc. 12th Conf. on Flexible Query Answering Systems (FQAS'17)*, London, Jun. 21-23, LNAI 10333, pages 28–35. Springer, 2017.
- [3] Blum, M., M. Luby et R. Rubinfeld: *Self-testing/correcting with applications to numerical problems*. J. of Computer and System Sciences, 47(3) :549–595, 1993.
- [4] Bounhas, M., H. Prade et G. Richard: *Analogy-based classifiers for nominal or numerical data*. Int. J. Approx. Reasoning, 91 :36–55, 2017.
- [5] Branting, L. K. et D. W. Aha: *Stratified case-based reasoning : reusing hierarchical problem solving episodes*. Dans *Proc. of the 14th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, tome 1, pages 384–390, August 1995.
- [6] Couceiro, M., N. Hug, H. Prade et G. Richard: *Analogy-preserving functions : a way to extend Boolean samples*. Dans *Proc. of the 26th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'17)*, pages 1575–1581. Morgan Kaufmann, Inc., 2017.
- [7] Couceiro, M., N. Hug, H. Prade et G. Richard: *Fonctions préservées par analogie : une méthode pour étendre des données booléennes*. Dans *11^{ème} Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale*, 2017.
- [8] Craw, S., N. Wiratunga et R. C. Rowe: *Learning adaptation knowledge to improve case-based reasoning*. Artificial Intelligence, 170(16-17) :1175–1192, 2006.
- [9] d'Aquin, M., F. Badra, S. Lafrogne, J. Lieber, A. Napoli et L. Szathmary: *Case base mining for adaptation knowledge acquisition*. Dans Veloso, M. M. (éditeur) : *Proc. of the 20th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'07)*, pages 750–755. Morgan Kaufmann, Inc., 2007.

- [10] Dubois, D., E. Hüllermeier et H. Prade: *Flexible control of case-based prediction in the framework of possibility theory*. Dans Blanzieri, E. et L. Portinale (rédacteurs) : *Advances in Case-Based Reasoning — Proc. of the 5th Eur. workshop on case-based reasoning (EWCBR'2k)*, LNCS 1898, pages 61–73. Springer, 2000.
- [11] Hanney, K. et M. T. Keane: *Learning adaptation rules from a case-base*. Dans Smith, I. et B. Faltings (rédacteurs) : *Advances in Case-Based Reasoning — Third Eur. Workshop, EWCBR'96*, LNAI 1168, pages 179–192. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [12] Jarmulak, J., S. Craw et R. Rowe: *Using case-base data to learn adaptation knowledge for design*. Dans *Proc. of the 17th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'01)*, pages 1011–1016. Morgan Kaufmann, Inc., 2001.
- [13] Lepage, Y. et É. Denoual: *Purest ever example-based machine translation : detailed presentation and assessment*. *Machine Translation*, 19 :251–282, 2005.
- [14] McSherry, D.: *Diversity-conscious retrieval*. Dans *Advances in Case-Based Reasoning, Proc. of ECCBR'02*, pages 219–233. Springer, LNCS 2416, 2002.
- [15] Miclet, L. et H. Prade: *Handling analogical proportions in classical logic and fuzzy logics settings*. Dans *Proc. 10th Eur. Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQA-RU'09)*, pages 638–650. Springer, LNCS 5590, 2009.
- [16] Minor, M., R. Bergmann et S. Görg: *Case-based adaptation of workflows*. *Information Systems*, 40 :142–152, 2014.
- [17] Prade, H. et G. Richard: *From analogical proportion to logical proportions*. *Logica Universalis*, 7(4) :441–505, 2013.
- [18] Prade, H. et G. Richard: *Analogical proportions and analogical reasoning - An introduction*. Dans Aha, D. W. et J. Lieber (rédacteurs) : *Proc. 25th Int. Conf. on Case-Based Reasoning Research and Development (ICCBR'17), Trondheim, Norway, June 26-28*, tome 10339 de LNAI, pages 16–32. Springer, 2017.
- [19] Richter, M. M. et R. O. Weber: *Case-based reasoning, a textbook*. Springer, 2013.
- [20] Schockaert, S. et H. Prade: *Interpolative and extrapolative reasoning in propositional theories using qualitative knowledge about conceptual spaces*. *Artificial Intelligence*, 202 :86–131, 2013.
- [21] Schockaert, S. et H. Prade: *Interpolative reasoning with default rules*. Dans Rossi, F. (éditeur) : *Proc. 23rd Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'13), Beijing, Aug. 3-9*, pages 1090–1096, 2013.
- [22] Schockaert, S. et H. Prade: *Completing symbolic rule bases using betweenness and analogical proportion*. Dans Prade, H. et G. Richard (rédacteurs) : *Computational Approaches to Analogical Reasoning : Current Trends*, tome 548 de *Studies in Computational Intelligence*, pages 195–215. Springer, 2014.
- [23] Smyth, B.: *Case-Based Design*. Thèse de doctorat, Trinity College, University of Dublin, 1996.